



PERCORSO AGENZIA DELLE ENTRATE

Introduzione al calcolo delle probabilità

Introduzione

Benvenuti!

In questa lezione parleremo dei principali concetti di probabilità.

In particolare, andremo ad approfondire:

- le definizioni di evento, evento complementare, spazio campionario, ecc.
- la teoria degli insiemi, utile a definire le probabilità di uno o più eventi
- gli assiomi di probabilità
- la legge delle probabilità totali e le probabilità condizionate

Bene, non ci resta che cominciare...

Definizioni fondamentali

- Si definisce **Esperimento casuale** (o aleatorio), un esperimento che, seppur ripetuto nelle medesime condizioni, non necessariamente fornisce sempre lo stesso risultato.
- Si definisce **Evento elementare**, un possibile risultato di un esperimento aleatorio.
- Si definisce, infine, **Spazio campionario**, un insieme degli eventi elementari, S .

Esempi:

	Esperimento	Spazio campionario
m1	Lancio di una moneta	T; C
da	Lancio di un dado	1, 2, 3, 4, 5, 6
ca	Estrarre una carta	1♣, 2♠, 3♥, 4♦
m2	Lancio di due monete	(T,T),(T,C),(C,T),(C,C)

Altre definizioni fondamentali

- Si definisce **Evento**, un qualsiasi sottoinsieme dello spazio campionario, che si verifica quando si verifica uno degli eventi elementari che lo compongono.
- Si definisce **Evento complementare di A**, l'evento "non si verifica A", ed è formato da tutti gli eventi elementari che non sono in A, ma in S.

Esempi:

	Evento	Evento complementare
m1	Testa	Croce
da	Pari	Dispari
ca	Cuori	Quadri, Fiori, Picche
m2	Testa al primo lancio	Croce al primo lancio



Intersezione tra eventi:

- Dati due eventi A e B, l'evento intersezione è formato dagli eventi elementari contenuti sia in A, sia in B.
- $A \cap B$ accade se A e B accadono simultaneamente.
- Due eventi si dicono incompatibili se non possono accadere simultaneamente. Ovviamente A e B sono incompatibili se e solo se $A \cap B = \emptyset$

Unione di eventi:

- Dati due eventi A e B, l'evento unione è formato dagli eventi elementari contenuti in A e/o in B.
- $A \cup B$ si verifica se accade A oppure B.

Esempi:

	Evento	Intersezione/Unione
m1	A = Testa, B= Croce	$A \cap B = \emptyset, A \cup B = S$
da	A = Pari, B = 1, C = 2	$A \cap B = \emptyset, A \cap C = C,$ $A \cup B = \{1, 2, 4, 6\},$ $A \cup C = A$
ca	A = Asso, B = Cuori	$A \cap B = \{1 \heartsuit\},$ $A \cup B = \{1 \heartsuit, 2 \heartsuit, \dots, K \heartsuit,$ $1 \diamond, 1 \clubsuit, 1 \spadesuit\}$
m2	A = Testa al primo lancio B = Testa al secondo lancio	$A \cap B = \{(T, T)\},$ $A \cup B = \{(T, T), (T, C), (C, T)\}$

Definizione di probabilità e postulati

- **Classica:** la probabilità di un evento è il rapporto tra casi favorevoli e casi possibili (*purché ugualmente possibili*).
- **Frequentista:** la probabilità di un evento è la frequenza di accadimento dell'evento su un numero infinito di prove.
- **Soggettiva:** la probabilità di un evento è quanto siamo disposti a scommettere sull'accadimento dell'evento per ricevere 1 se accade.

La probabilità è una funzione definita nello spazio campionario **S** che gode delle seguenti proprietà:

- $P(S) = 1$, la probabilità dello spazio campionario è pari alla probabilità dell'evento certo
- $P(\emptyset) = 0$, la probabilità dell'evento impossibile è pari a 0
- $0 \leq P(A) \leq 1, \forall A$, la probabilità di un evento è sempre compresa tra 0 e 1
- $P(A^c) = 1 - P(A), \forall A$, la probabilità di un evento complementare è pari a 1 meno la probabilità dell'evento
- Se A e B sono incompatibili, allora: $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$
- Legge della probabilità totali: $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$, la probabilità dell'unione di due eventi è pari alla probabilità del primo più la probabilità del secondo meno la probabilità dell'evento intersezione.
- La probabilità di A condizionata a B è la probabilità di A sapendo che B si è verificato.
 - $P(A | B) = P(A \cap B) / P(B) \Rightarrow$ Probabilità condizionata di A dato B
 - $P(B | A) = P(A \cap B) / P(A) \Rightarrow$ Probabilità condizionata di B dato A
- Due eventi A e B si dicono indipendenti se il verificarsi dell'uno non modifica la probabilità di verificarsi dell'altro:
 - $P(A \cap B) = P(A)P(B)$



- $P(A | B) = P(A)$
- $P(B | A) = P(B)$

Esercizio esplicativo

- Un arciere colpisce il bersaglio con probabilità 0.4, se c'è vento, e 0.7, se non c'è vento. La probabilità che ci sia vento, ad ogni tiro, è 0.3.
 - Calcolare la probabilità di NON colpire in un tiro.
 - Sapendo che il tiro sia andato a segno, calcolare la probabilità che non ci sia stato vento

È fondamentale scrivere nel modo corretto i dati dell'esercizio:

- $B_1 =$ colpire
- $A_1 =$ vento
- $P(B_1 | A_1) = 0.4$
- $P(B_1 | A_1^c) = 0.7$
- $P(A_1) = 0.3$

La probabilità di non colpire, cioè $P(B_1^c) = P(B_2) = 1 - P(B_1)$, cioè uno meno la probabilità di colpire.

La probabilità di colpire è data dalla somma delle probabilità di eventi intersezione $P(B_1 \cap A_1) + P(B_1 \cap A_1^c)$.

Utilizzando la definizione della probabilità dell'intersezione:

- $P(B_1 \cap A_1) = P(A_1) P(B_1 | A_1) = 0.3 * 0.4$
- $P(B_1 \cap A_1^c) = P(A_2) P(B_1 | A_2) = (1-0.3)*0.7$
- $P(B_1^c) = P(B_2) = 1 - P(B_1) = 1 - [0.3 * 0.4 + 0.7 * 0.7] = 1 - 0.61 = 0.39$

La probabilità che non ci sia stato vento, sapendo che il tiro è andato a bersaglio è $P(A_2 | B_1)$.

Usando la definizione di probabilità condizionata:

$$P(A_2 | B_1) = P(A_2 \cap B_1) / P(B_1)$$

Abbiamo già calcolato queste quantità al punto precedente, e cioè:

- $P(A_2 \cap B_1) = P(A_2) P(B_1 | A_2) = (1-0.3)*0.7$
- $P(B_1) = 0.61$
- $P(A_2 | B_1) = 0.49/0.61$

Conclusioni

Bene, con questo siamo giunti alla fine di questa video lezione.

Ti ricordo che abbiamo parlato del Calcolo delle probabilità. In particolare abbiamo visto:

- la teoria degli insiemi
- e gli assiomi di probabilità

Grazie per l'attenzione!